Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Diferencijalne jednadžbe
  $\rightarrow$ pojavljuje se derivacija
- Obične diferencijalne jednadžbe
  $\rightarrow$ obična (ne parcijalna) derivacija
- Prvog reda
  $\rightarrow$ prva derivacija

Već smo se susreli s nekim običnim diferencijalnim jednadžbama prvog reda.

- Jednadžba radioaktivnog raspada $y' = -ky$
- Jednadžba hlađenja/zagrijavanja $y' = -k(y - S)$

Rješenje diferencijalne jednadžbe

Primjer 1

Odredite funkciju $y(x)$ za koju vrijedi $y' = 2x$.

$$y(x) = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe je skup funkcija koje ovise o konstanti C.

Takvo se riješenje naziva **opće rješenje**.

Metoda separacije varijabli

Najjednostavnija metoda za rješavanje ODJ 1. reda je **metoda separacije varijabli**. Nju koristimo ako se zadana jednadžba može zapisati u obliku

$$y' = f(x)g(y).$$

Metoda se sastoji od tri koraka.

(i) Zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$.

(ii) Separiramo varijable, tj. na jednu stranu prebacimo sve članove koji sadrže x, a na drugu sve članove koji sadrže y.

(iii) Integriramo jednadžbu.

Primjer 2

Riješite jednadžbu $y' = 4\frac{x}{y}$.

(i) $\dfrac{dy}{dx} = 4\dfrac{x}{y}$

(ii) $ydy = 4xdx$

(iii) $\displaystyle\int ydy = \int 4xdx$

$$
\begin{aligned}
\frac{y^2}{2} + C_1 &= 4\frac{x^2}{2} + C_2 \\
\frac{y^2}{2} &= 2x^2 + C_3 \qquad (C_3 = C_2 - C_1) \\
y^2 &= 4x^2 + 2C_3 \\
y^2 &= 4x^2 + C \qquad (C = 2C_3)
\end{aligned}
$$

Primjer 3

Riješite jednadžbu $y' = \frac{y}{x}$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + \ln C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \ln(C|x|) \\ |y| &= C|x| \\ y &= (\pm C)x \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Partikularno rješenje

Partikularno rješenje je jedinstveno rješenje koje ne ovisi o konstanti C, tj. C iz općeg rješenja je neki konkretan broj.

Da bismo dobili partikularno rješenje potrebno je uz ODJ 1. reda imati i dodatni uvjet.

Sustav ODJ i početnog uvjeta oblika

$$y(x_0) = y_0$$

naziva se **Cauchyjev problem**.

Takav problem ima jedinstveno rješenje.

Primjer 4

Riješite Cauchyjev problem

$$y' = -\frac{y}{x}, \qquad y(1) = 2.$$

Prvo riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$\rightarrow \quad y = \frac{C}{x} \quad \text{opće rješenje.}$$

Potom uvrstimo početni uvjet da bi dobili C

$$\rightarrow \quad 2 = \frac{C}{1}, \quad \text{tj. } C = 2.$$

Partikualrno rješenje onda glasi

$$y = \frac{2}{x}.$$

Obična linearna diferencijalna jednadžba 1. reda

Obična **linearna** diferencijalna jednadžba 1. reda je jednadžba oblika

$$y' + h(x)y = g(x),$$

gdje su g i h realne funkcije.

Ako je $g(x) = 0$, jednadžba je **homogena**.

Linearna ODJ 1. reda rješava se tako da se

(i) separacijom varijabli riješi homogena jednadžba,

(ii) a zatim se koristi **metoda varijacije konstante** da se dobije rješenje nehomogene jednadžbe.

Ovu ćemo metodu objasniti na primjeru.

Primjer 5

Riješite jednadžbu $y' + \frac{2}{x}y = 8x$.

Rješenje homogene jednadžbe $y' + \frac{2}{x}y = 0$ je $y = \frac{C}{x^2}$.

Sada konstantu C shvatimo kao funkciju koja ovisi o x, $C = c(x)$.
Uvrštavanjem u rješenje homogene dobijemo

$$y = \frac{c(x)}{x^2},$$

a ovo zatim uvrstimo u polaznu jednadžbu.

Nakon kraćenja imamo

$$c'(x) = 8x^3 \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int 8x^3 = 2x^4 + D.$$

Konačno rješenje dobijemo tako što $c(x)$ uvrstimo u rješenje homogene jednadžbe,

$$y = \frac{c(x)}{x^2} = \frac{2x^4 + D}{x^2} = 2x^2 + \frac{D}{x^2}.$$

Zadatci

1. Riješite Cauchyjev problem

$$y' = 3y, \quad y(0) = 6.$$

2. Riješite Cauchyjev problem

$$(2x + 3x^2)y' + (2 + 6x)y = \sin(2x), \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0.$$